DOLAYLI (ENDİREKT) ÖLÇÜLER DENGELEMESİ

Dengeleme Hesabının Temel İşlemleri;

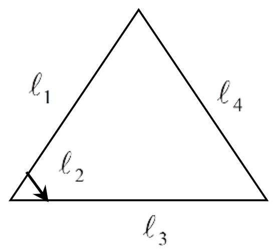
- Fonksiyonel model ve stokastik modelle matematik modelin kurulması,
- V^TPV = min. amaç fonksiyonu,
- Düzeltmelerin hesabı,
- Dengeli değerlerin hesabı
- $m_0 = \pm\sqrt{\dfrac{[PVV]}{n-u}}$ Birim ölçünün karesel ortalama hatası (soncul değer)
- Duyarlık hesapları

Bir dengeleme probleminin çözümü için birden fazla bilinmeyenin birlikte belirlenmesi gerekiyorsa ve yapılan ölçülerin sayısı bilinmeyenlerin sayısından çoksa dolaylı(endirekt) ölçülerin dengelemesi söz konusu olur. Doğrudan ölçülemeyen bir büyüklüğün başka büyüklüklerin fonksiyonu olarak en küçük kareler yöntemine göre hesaplanması işlemidir. Dolaylı ölçüler dengelemsinde ilk aşama bilinmeyenlerin seçilmesidir. Bilinmeyenlerin sayısı, problemin geometrik anlamda çözümü yada çizimi için gerekli ölçü sayısı kadardır. Bilinmeyenler düzeltme denklemlerinin kolayca kurulmasını sağlayacak şekilde seçilmelidir.

Bir dengeleme probleminde; n: ölçü sayısı, u: bilinmeyen sayısı, f = n-u fazla ölçü sayısını gösterir.

- **Bilinmeyenlerin Seçimi :** Bilinmeyen sayısı bir geometrik şeklin geometrik çözümü için gerekli olan ölçü sayısına eşittir.

$$\ell_1 = x$$
$$\ell_2 = y$$
$$\ell_3 = z$$
$$\ell_4 = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz\mathrm{Cos}y}$$



- **Düzeltme Denklemlerinin Kurulması ve Doğrusallaştırma**

n ölçü sayısı u bilinmeyen sayısından fazla ise f = n – u > 0 ise ölçü sayısı kadar düzeltme denklemi yazılmalıdır.

Ölçü + Düzeltmesi = Bilinmeyenlerin Fonksiyonu

$$L_i + V_i = \Phi_i(x, y, z, ..., u); i = 1,2, ..., n$$

Yazılan düzeltme denklemleri genelde doğrusal değildir. Doğrusallaştırma yapılırken bilinmeyenlerin yaklaşık değerleri kullanılır. x_0, y_0,….,u_0 yaklaşık değerleri kullanılarak düzeltme denklemi Taylor serisine açılır ve 2. ve daha yüksek dereceli terimler ihmal edilerek doğrusallaştırılmış düzeltme denklemleri elde edilir.

$$\begin{aligned} X &= X_0 + dx \\ Y &= Y_0 + dy \\ &... \\ U &= U_0 + du \end{aligned}$$

Bu durumda düzeltme denklemleri

$$L_i + V_i = \Phi_i(X_0, Y_0, Z_0, ..., U_0) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_0 dy + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)_0 dz + ...$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial X}\right)_0 = a_i, \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Y}\right)_0 = b_i, \left(\frac{\partial\Phi}{\partial Z}\right)_0 = c_i$$

$$L_i + V_i = \Phi_i(X_0, Y_0, Z_0, ..., U_0) + a_i dx + b_i dy + c_i dz$$

$-\ell_i = \Phi_i(X_0, Y_0, Z_0, ..., U_0) - L_i$ yazılırsa,

$V_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz - \ell_i$ Doğrusallaştırılmış düzeltme denklemleri elde edilir.

Dolaylı ölçüler dengelemesinde her ölçü için bir düzeltme denklemi yazılır ve bu denklem yardımıyla ölçünün düzeltmesi bulunur.

- **Normal denklemlerin Kurulması ve Çözümü**

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz - \ell_1 \\ V_2 &= a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz - \ell_2 \\ &... \\ V_n &= a_n dx + b_n dy + c_n dz - \ell_n \end{aligned}\right\} \text{Fonksiyonel Model}$$

Ölçülerin Ağırlıkları birbirine eşitse;

$P_1 = P_2 = ... = P_n = 1$ Stokastik Model

Bilinmeyenlerin tek anlamlı çözümünü elde etmek için

$\underline{V}^T \underline{V} = \min.$ yada $[VV] = \min.$ koşuluyla çözüm yapılır.

$$X = X_0 + x$$
$$Y = Y_0 + y$$
$$Z = Z_0 + z$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z - \ell_1 \\
V_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z - \ell_2 \\
&\dots \\
V_n &= a_n x + b_n y + c_n z - \ell_n
\end{aligned}\ ,$$

$$\begin{aligned}
V_1^2 &= a_1^2 x^2 + b_1^2 y^2 + c_1^2 z^2 + \ell_1^2 + 2a_1 b_1 xy + 2a_1 c_1 xc - 2a_1 \ell_1 x + 2b_1 c_1 yz - 2b_1 \ell_1 y - 2c_1 \ell_1 z \\
V_2^2 &= a_2^2 x^2 + b_2^2 y^2 + c_2^2 z^2 + \ell_2^2 + 2a_2 b_2 xy + 2a_2 c_2 xc - 2a_2 \ell_2 x + 2b_2 c_2 yz - 2b_2 \ell_2 y - 2c_2 \ell_2 z \\
&\dots \\
V_n^2 &= a_n^2 x^2 + b_n^2 y^2 + c_n^2 z^2 + \ell_n^2 + 2a_n b_n xy + 2a_n c_n xc - 2a_n \ell_n x + 2b_n c_n yz - 2b_n \ell_n y - 2c_n \ell_n z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[VV] = [aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz - 2[a\ell]x \\
+ [bb]y^2 + 2[bc]yz - 2[b\ell]y \\
+ [cc]z^2 - 2[c\ell]z + [\ell\ell] = \min.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial [VV]}{\partial x} = 2[aa]x + 2[ab]y + 2[ac]z - 2[a\ell] = 0$$
$$\frac{\partial [VV]}{\partial y} = 2[ab]x + 2[bb]y + 2[bc]z - 2[b\ell] = 0$$
$$\frac{\partial [VV]}{\partial z} = 2[ac]x + 2[bc]y + 2[cc]z - 2[c\ell] = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z - [a\ell] = 0 \\
[ab]x + [bb]y + [bc]z - [b\ell] = 0 \\
[ac]x + [bc]y + [cc]z - [c\ell] = 0
\end{aligned}\right)_{u\,x\,u} \quad \text{Normal Denklemler}$$

Normal Denklemlerin Özellikleri

- Simetrik, doğrusal denklem takımlarıdır.
- Matrisin köşegen elemanları karesel olduğu için her zaman (+) işaretlidir.
- Matrisin köşegen harici elemanları (+) veya (-) işaretlidir.
- Normal denklemeler "Modernleştirilmiş Gauss Algoritması" yada "Cholesky Yöntemi" gibi simetrik doğrusal denklem takımlarının çözüm yöntemleriyle indirgenerek çözülürler.

- **Denetim İşlemleri**

Normal denklemlerin kuruluş kontrolü

$$V_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z - \ell_1$$
$$V_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z - \ell_2$$
$$...$$
$$V_n = a_n x + b_n y + c_n z - \ell_n$$

$$S_1 = a_1 + b_1 + c_1 - \ell_1$$
$$S_2 = a_2 + b_2 + c_2 - \ell_2$$
$$...$$
$$S_n = a_n + b_n + c_n - \ell_n$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -\ell_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -\ell_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ a_n & b_n & c_n & -\ell_n \end{bmatrix}$$

Bu eşitlik toplanırsa $[S]=[a]+[b]+[c]-[\ell]$ eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlik sırasıyla ($a_1, a_2, \ldots, a_n$), ($b_1, b_2, \ldots, b_n$), ($c_1, c_2, \ldots, c_n$), ($-\ell_1, -\ell_2, \ldots, -\ell_n$), ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$[aS]=[aa]+[ab]+[ac]-[a\ell]$$
$$[bS]=[ab]+[bb]+[bc]-[b\ell]$$
$$[cS]=[ac]+[bc]+[cc]-[c\ell]$$
$$-[\ell S]=-[a\ell]-[b\ell]-[c\ell]+[\ell\ell]$$

eşitlikleri elde edilir. Bu şekilde normal denklemlerin kuruluş ve indirgeme aşamalarında yapılan işlemler ve düzeltmelerin kareleri toplamı denetlenir.

Bu işlemler tablo şeklinde de yapılabilir.

a	b	c	$-\ell$	S
a_1	b_1	c_1	$-\ell_1$	S_1
a_2	b_2	c_2	$-\ell_2$	S_2
..	..	..	..	..
a_n	b_n	c_n	$-\ell_n$	S_n

Modenleştirilmiş Gauss Algoritmasına göre;

x	y	z	sabit	S(toplam)
[aa]	[ab]	[ac]	-[aℓ]	[aS]
	[bb]	[bc]	-[bℓ]	[bS]
		[cc]	-[cℓ]	[cS]
			[$\ell\ell$]	-[ℓS]

[V] ve [VV] Kontrolü

$$[V] = [a]x + [b]y + [c]z - [\ell]$$

$$[aV] = [aa]x + [ab]y + [ac]z - [a\ell]$$
$$[bV] = [ab]x + [bb]y + [bc]z - [b\ell] \text{ 1. denetim bağıntısı}$$
$$[cV] = [ac]x + [bc]y + [cc]z - [c\ell]$$

Bu eşitliklerin sağ tarafları normal denklemlerin sol tarafına eşit olduğundan;

$[aV] = 0, [bV] = 0, [cV] = 0$ yazılabilir. 1. denetim bağıntısı

$$-[\ell V] = -[a\ell]x - [b\ell]y - [c\ell]z + [\ell\ell]$$

$$[VV] = [aV]x + [bV]y + [cV]z - [\ell V]$$

$[aV] = 0, [bV] = 0, [cV] = 0$ ise

$$[VV] = -[\ell V]$$

Düzeltme denklemlerinin her iki tarafı ($-\ell_1, -\ell_2, \ldots, -\ell_n$) ile çarpılıp toplanırsa;

$$\begin{pmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ .. \\ -\ell_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z - \ell_1 \\ V_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z - \ell_2 \\ \ldots \\ V_n = a_n x + b_n y + c_n z - \ell_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} -\ell_1 V_1 = -a_1\ell_1 x - b_1\ell_1 y - c_1\ell_1 z + \ell_1\ell_1 \\ -\ell_2 V_2 = -a_2\ell_2 x - b_2\ell_2 y - c_2\ell_2 z + \ell_2\ell_2 \\ \ldots \\ -\ell_n V_n = -a_n\ell_n x - b_n\ell_n y - c_n\ell_n z + \ell_n\ell_n \end{matrix}$$

$$-[\ell V] = [\ell\ell] - [a\ell]x - [b\ell]y - [c\ell]z = [VV]$$

bilinmeyenlerin ve düzeltmelerin hesabı işlemlerini kontrol bağıntısı elde edilir. Bu eşitlikteki katsayılar normal denklemlerin sabit terimleridir. Modernleştirilmiş Gauss algoritmasına göre indirgemede köşegen son terim olarak $[\ell\ell]$ ve toplam sütununa da $-[\ell S]$ yazılarak çözüm yapılırsa direkt $[VV]$ elde edilir.

x	**y**	**z**	**Sabit**	**S (Toplam)**
$[aa]$ -1	$[ab]$ $-\frac{[ab]}{[aa]}$	$[ac]$ $-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-[a\ell]$ $\frac{[a\ell]}{[aa]}$	$[aS]$ $-\frac{[aS]}{[aa]}$
	$[bb]$ $[bb.1]$ -1	$[bc]$ $[bc.1]$ $-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	$-[b\ell]$ $-[b\ell.1]$ $\frac{[b\ell.1]}{[bb.1]}$	$[bS]$ $[bS.1]$ $-\frac{[bS.1]}{[bb.1]}$
		$[cc]$ $[cc.2]$ -1	$-[c\ell]$ $-[c\ell.2]$ $\frac{[c\ell.2]}{[cc.2]}$	$[cS]$ $[cS.2]$ $-\frac{[cS.2]}{[cc.2]}$
		$[VV] = \bullet$	$[\ell\ell]$ $[\ell\ell.3]$	$-[\ell S]$ $-[\ell S.3]$

X1	**X2**	**X3**	**-b**	**S**
a_{11} -1	a_{12} $-a_{12}/a_{11}$	a_{13} $-a_{13}/a_{11}$	$-b_1$ b_1/a_{11}	S_1 $-S_1/a_{11}$
	a_{22} $a_{22.1} = a_{22} - a_{12}.a_{12}/a_{11}$ -1	a_{32} $a_{23.1} = a_{23} - a_{12}.a_{13}/a_{11}$ $-a_{23.1}/a_{22.1}$	$-b_2$ $-b_{2.1} = -b_2 + a_{12}.b_1/a_{11}$ $b_{2.1}/a_{22.1}$	S_2 $S_{2.1} = S_2 - a_{12}.S_1/a_{11}$ $-S_{2.1}/a_{22.1}$
		a_{33} $a_{33.2} = a_{33} - a_{13}.a_{13}/a_{11}$ $-a_{23.1}.a_{23.1}/a_{22.1}$ -1	b_3 $-b_{3.2} = -b_3 + a_{13}.b_1/a_{11}$ $+a_{23.1}.b_{2.1}/a_{22.1}$ $b_{3.2}/a_{33.2}$	S_3 $S_{3.2} = S_3 - a_{13}.S_1/a_{11}$ $-a_{23.1}.S_{2.1}/a_{22.1}$ $-S_{3.2}/a_{33.2}$

$$z = \frac{b_{3.2}}{a_{33.2}}, \quad y = -\frac{a_{23.1}}{a_{22.1}}.z + \frac{b_{2.1}}{a_{22.1}}, \quad x = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y - \frac{a_{13.1}}{a_{11}}.z + \frac{b_1}{a_{11}}$$

Sonuç Denetimleri

Çözümle elde edilen x, y, z değerleri kullanılarak düzeltmelerin sayısal değerleri elde edilir. Düzeltmeler ölçülere eklenerek dengeli ölçüler bulunur. Bilinmeyenlerin kesin değerleri ve en son olarak bu değerler yerine konularak ilk düzeltme denklemlerinin sonuç denetimleri yapılır.

$$\begin{aligned} V_1 &= a_1x + b_1y + c_1z - \ell_1 \\ V_2 &= a_2x + b_2y + c_2z - \ell_2 \\ &\dots \\ V_n &= a_nx + b_ny + c_nz - \ell_n \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \hat{\ell}_1 &= \ell_1 + V_1 \\ \hat{\ell}_2 &= \ell_2 + V_2 \\ &\dots \\ \hat{\ell}_n &= \ell_n + V_n \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} X &= X_0 + x \\ Y &= Y_0 + y \ , \ L_i + V_i = \Phi_i(X, Y, Z) \\ Z &= Z_0 + z \end{aligned}$$

- **Duyarlık Hesapları**

Ölçülerin Ortalama Hatası

Düzeltmeler hesaplandıktan sonra yada Modernleştirilmiş Gauss Algoritmasına eklenen son satır ile elde edilen değerlerden;

$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{n-u}}$ ölçülerin karesel ortalama hatası hesaplanır.

Bilinmeyenlerin gerçek değerleri $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ve dengeleme sonucu elde edilen kesin değerleri x, y, z ile gösterilirse gerçek düzeltmelerle dengelemenin fonksiyonel modeli;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1\bar{z} - \ell_1 \\ \varepsilon_2 &= a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2\bar{z} - \ell_2 \\ &\dots \\ \varepsilon_n &= a_n\bar{x} + b_n\bar{y} + c_n\bar{z} - \ell_n \end{aligned}$$

şeklindedir.Bu eşitlikten sabit terimler çekilir ve düzeltme denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} -\ell_1 &= \varepsilon_1 - a_1\bar{x} - b_1\bar{y} - c_1\bar{z} \\ -\ell_2 &= \varepsilon_2 - a_2\bar{x} - b_2\bar{y} - c_2\bar{z} \\ &\dots \\ -\ell_n &= \varepsilon_n - a_n\bar{x} - b_n\bar{y} - c_n\bar{z} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} V_1 &= a_1(x - \bar{x}) + b_1(y - \bar{y}) + c_1(z - \bar{z}) + \varepsilon_1 \\ V_2 &= a_2(x - \bar{x}) + b_2(y - \bar{y}) + c_2(z - \bar{z}) + \varepsilon_2 \\ &\dots \\ V_n &= a_n(x - \bar{x}) + b_n(y - \bar{y}) + c_n(z - \bar{z}) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ($V_1, V_2, \dots, V_n$) ile çarpılıp toplanırsa;

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ .. \\ V_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 = a_1(x-\bar{x}) + b_1(y-\bar{y}) + c_1(z-\bar{z}) + \varepsilon_1 \\ V_2 = a_2(x-\bar{x}) + b_2(y-\bar{y}) + c_2(z-\bar{z}) + \varepsilon_2 \\ ... \\ V_n = a_n(x-\bar{x}) + b_n(y-\bar{y}) + c_n(z-\bar{z}) + \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} V_1V_1 = a_1V_1(x-\bar{x}) + b_1V_1(y-\bar{y}) + c_1V_1(z-\bar{z}) + \varepsilon_1V_1 \\ V_2V_2 = a_2V_2(x-\bar{x}) + b_2V_2(y-\bar{y}) + c_2V_2(z-\bar{z}) + \varepsilon_2V_2 \\ ... \\ V_nV_n = a_nV_n(x-\bar{x}) + b_nV_n(y-\bar{y}) + c_nV_n(z-\bar{z}) + \varepsilon_nV_n \end{matrix}$$

$[VV] = [aV](x-\bar{x}) + [bV](y-\bar{y}) + [cV](z-\bar{z}) + [\varepsilon V]$ $\quad [aV]=0$ $[bV]=0$ $[cV]=0$ ise

$[VV] = [\varepsilon V]$ olur.

Yukarıdaki eşitlik ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$) ile çarpılıp toplanırsa;

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ .. \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 = a_1(x-\bar{x}) + b_1(y-\bar{y}) + c_1(z-\bar{z}) + \varepsilon_1 \\ V_2 = a_2(x-\bar{x}) + b_2(y-\bar{y}) + c_2(z-\bar{z}) + \varepsilon_2 \\ ... \\ V_n = a_n(x-\bar{x}) + b_n(y-\bar{y}) + c_n(z-\bar{z}) + \varepsilon_n \end{pmatrix} = \begin{matrix} \varepsilon_1V_1 = a_1\varepsilon_1(x-\bar{x}) + b_1\varepsilon_1(y-\bar{y}) + c_1\varepsilon_1(z-\bar{z}) + \varepsilon_1\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2V_2 = a_2\varepsilon_2(x-\bar{x}) + b_2\varepsilon_2(y-\bar{y}) + c_2\varepsilon_2(z-\bar{z}) + \varepsilon_2\varepsilon_2 \\ ... \\ \varepsilon_nV_n = a_n\varepsilon_n(x-\bar{x}) + b_n\varepsilon_n(y-\bar{y}) + c_n\varepsilon_n(z-\bar{z}) + \varepsilon_n\varepsilon_n \end{matrix}$$

$[\varepsilon V] = [a\varepsilon](x-\bar{x}) + [b\varepsilon](y-\bar{y}) + [c\varepsilon](z-\bar{z}) + [\varepsilon\varepsilon] = [VV]$

Yukarıdaki eşitlik sırasıyla ($a_1, a_2, \ldots, a_n$), ($b_1, b_2, \ldots, b_n$) ve ($c_1, c_2, \ldots, c_n$) ile çarpılıp toplanırsa;

$[aV] = [aa](x-\bar{x}) + [ab](y-\bar{y}) + [ac](z-\bar{z}) + [a\varepsilon] = 0$

$[bV] = [ab](x-\bar{x}) + [bb](y-\bar{y}) + [bc](z-\bar{z}) + [b\varepsilon] = 0$

$[cV] = [ac](x-\bar{x}) + [bc](y-\bar{y}) + [cc](z-\bar{z}) + [c\varepsilon] = 0$

eşitlikleri elde edilir. Normal denklemler benzeyen bu denklemlerde bilinmeyenler yerine (x-$\bar{x}$), (y-$\bar{y}$), (z-$\bar{z}$) ve sabit teri yerine $[a\varepsilon]$, $[b\varepsilon]$, $[c\varepsilon]$ yazarak Modernleştirilmiş Gauss Algoritmasına göre çözüm yapılırsa;

$$[VV] = nm_0^2 - 3m_0^2 = m_0^2(n-3) \Rightarrow m_0^2 = \frac{[VV]}{(n-3)}$$

bilinmeyen sayısı 3 olan bir dengeleme probleminde elde edilen bu bağıntı bilinmeyen sayısı u için düzenlenirse,

$m_0 = \pm\sqrt{\frac{[VV]}{(n-u)}}$ eşitliği elde edilir.

Bilinmeyenlerin Ortalama Hatası

Bilinmeyenlerin ötelenmiş değerleriyle ortalama hataları birbirine eşittir. Normal denklemler modernleştirilmiş Gauss Algoritması ile harfli olarak çözülürse;

$$x = \frac{[a\ell]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\left(\frac{[b\ell.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\frac{[c\ell.2]}{[cc.2]}\right) - \frac{[ac]}{[aa]}\frac{[c\ell.2]}{[cc.2]}$$

$$y = \frac{[b\ell.1]}{[bb.1]} - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}\frac{[c\ell.2]}{[cc.2]}$$

$$z = \frac{[c\ell.2]}{[cc.2]}$$

elde edilir. Bu eşitliklerdeki $[a\ell]$, $[b\ell.1]$ ve $[c\ell.2]$ terimleri açık yazılır ve eşitlikler ℓ_i 'ye göre düzenlenirse,

$$x = \alpha_1\ell_1 + \alpha_2\ell_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\ell_n$$
$$y = \beta_1\ell_1 + \beta_2\ell_2 + \ldots\ldots + \beta_n\ell_n$$
$$\ldots\ldots$$
$$z = \gamma_1\ell_1 + \gamma_2\ell_2 + \ldots\ldots + \gamma_n\ell_n$$

Duyarlıkları eşit ilk bağımsız ölçülerin bir fonksiyonu olan bu eşitliklere hata yayılma kuralı uygulanırsa;

$$m_x^2 = \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2\right)m_0^2 = [\alpha\alpha]m_0^2$$
$$m_y^2 = [\beta\beta]m_0^2 \qquad \text{Bilinmeyenlerin karesel ortalama hatası}$$
$$m_z^2 = [\gamma\gamma]m_0^2$$

Bu eşitliklerdeki $[\alpha\alpha], [\beta\beta], [\gamma\gamma]$ katsayıları normal denklemler matrisinin tersi alınarak hesaplanır.

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} [aa] & [ab] & [ac] \\ [ab] & [bb] & [bc] \\ [ac] & [bc] & [cc] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [\alpha\alpha] & [\alpha\beta] & [\alpha\gamma] \\ [\alpha\beta] & [\beta\beta] & [\beta\gamma] \\ [\alpha\gamma] & [\beta\gamma] & [\gamma\gamma] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [q_{xx}] & [q_{xy}] & [q_{xz}] \\ [q_{xy}] & [q_{yy}] & [q_{yz}] \\ [q_{xz}] & [q_{yz}] & [q_{zz}] \end{bmatrix}$$

Bilinmeyenlerin karesel ortalama hataları;

$$m_x = \pm m_0\sqrt{q_{xx}}, \quad m_y = \pm m_0\sqrt{q_{yy}}, \quad m_z = \pm m_0\sqrt{q_{zz}},$$

eşitliklerinden hesaplanır.

Bilinmeyenlerin Bir Fonksiyonunun Ortalama Hatası

Karesel ortalama hatası hesaplanacak fonksiyon,

$f = F(X, Y, Z)$ ve $X = X_0 + x$; $Y = Y_0 + y$; $Z = Z_0 + z$ olsun. Yaklaşık değerlerle fonksiyon Taylor serisine açılırsa;

$$f = F(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial f}{\partial x} x + \frac{\partial f}{\partial y} y + \frac{\partial f}{\partial z} z \text{ olur.}$$

Burada, $f_0 = F(X_0, Y_0, Z_0)$ $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f_y, \frac{\partial f}{\partial z} = f_z$ yazılırsa

$$f = f_0 + f_x x + f_y y + f_z z$$

$$q_{ff} = f_x^2 q_{xx} + f_y^2 q_{yy} + f_z^2 q_{zz} + 2 f_x f_y q_{xy} + 2 f_x f_z q_{xz} + +2 f_y f_z q_{yz}$$

$$m_f = \pm m_0 \sqrt{q_{ff}}$$

Bilinmeyenlerin Fonksiyonlarının Bir Fonksiyonunun Ortalama Hatası

$f = F(X, Y, Z)$

$g = G(X, Y, Z)$ olsun. $h = H(f, g)$ şeklindeki bir fonksiyonunu ortalama hatasını hesaplamak için önce f ve g fonksiyonlarının ters ağırlıkları hesaplanır.

$$f = f_0 + f_x x + f_y y + f_z z$$

$$g = g_0 + g_x x + g_y y + g_z z$$

$$q_{ff} = f_x^2 q_{xx} + f_y^2 q_{yy} + f_z^2 q_{zz} + 2 f_x f_y q_{xy} + 2 f_x f_z q_{xz} + +2 f_y f_z q_{yz}$$

$$q_{gg} = g_x^2 q_{xx} + g_y^2 q_{yy} + g_z^2 q_{zz} + 2 g_x g_y q_{xy} + 2 g_x g_z q_{xz} + +2 g_y g_z q_{yz}$$

$$q_{gf} = f_x g_x q_{xx} + f_y g_y q_{yy} + f_z g_z q_{zz} + (f_x g_y + f_y g_x) q_{xy} + (f_x g_z + f_z g_x) q_{xz} + (f_y g_z + f_z g_y) q_{yz}$$

$$\frac{\partial h}{\partial f} = h_f, \frac{\partial h}{\partial g} = h_g, \qquad h = h_0 + h_f f + h_f g$$

Buradan h fonksiyonunun ters ağırlığı;

$$q_{hh} = h_f^2 q_{ff} + h_g^2 q_{gg} + 2 h_f h_g q_{fg}$$

$m_f = \pm m_0 \sqrt{q_{hh}}$ olur.